

CAPITULO 7

COMPONENTES SIMÉTRICAS

Nota preliminar: En este capítulo excepcionalmente, emplearemos la notación V (sin raya superior) para un complejo y $|V|$ para su módulo ya que casi no aparecen módulos en los desarrollos.

Introducción

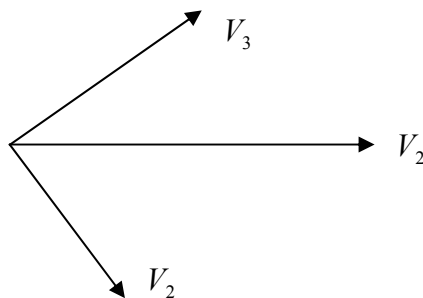
Sea un vector de tres componentes complejas.

$$\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$$

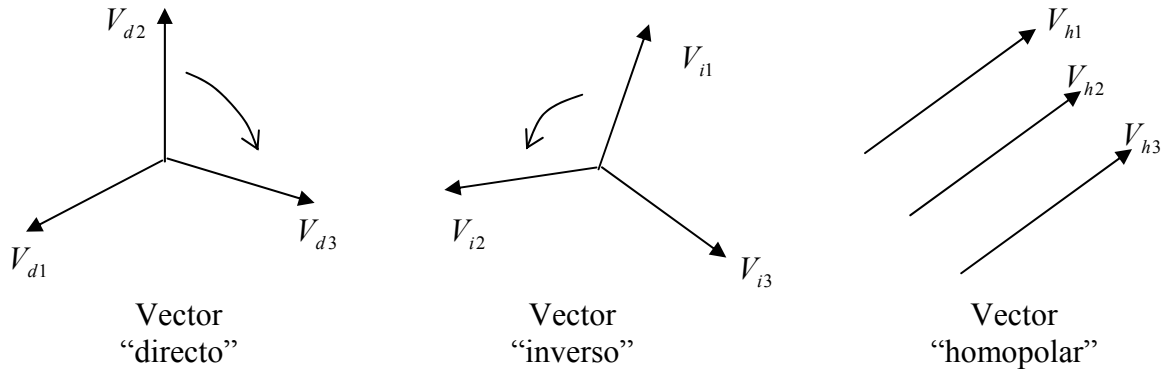
Este vector puede tener distintas interpretaciones en un circuito trifásico, donde se tiene siempre tres componentes:

- Tensión en un punto del circuito respecto a un punto de referencia (que suele ser el neutro del sistema).
- Tensión entre dos “puntos” del circuito (tenemos tres parejas de puntos geométricos).
- Corriente en un ramal.
- Impedancia de un ramal.
- Potencia eléctrica consumida en un ramal (en cada fase del ramal se tiene una potencia compleja - activa y reactiva).
- Etc.

Llamaremos a los números complejos V_1 , V_2 , V_3 , “componentes fásicas” del vector $\vec{V}$:



Es fácil ver que este vector se puede descomponer en la suma de tres vectores perfectos en la forma siguiente:



El vector directo esta formado por tres componentes de igual módulo, de ángulo 120° dos a dos y de secuencia horaria; el vector inverso por tres componentes de igual módulo, ángulo 120° dos a dos, secuencia anti-horaria, y el vector homopolar por tres complejos de igual módulo y en fase.

Utilizando el operador $a = e^{j120^\circ}$, usamos la siguiente notación:

$$\begin{cases} V_{d1} = V_d \\ V_{d2} = a^2 V_d \\ V_{d3} = a V_d \end{cases} \quad \begin{cases} V_{i1} = V_i \\ V_{i2} = a V_i \\ V_{i3} = a^2 V_i \end{cases} \quad \begin{cases} V_{h1} = V_h \\ V_{h2} = V_h \\ V_{h3} = V_h \end{cases}$$

Es obvio que el solo conocimiento de V_d , V_i , V_h determina completamente los tres vectores perfectos.

Tendremos:

$$\vec{V} = (V_{d1}, V_{d2}, V_{d3}) + (V_{i1}, V_{i2}, V_{i3}) + (V_{h1}, V_{h2}, V_{h3})$$

de donde:

$$\begin{cases} V_1 = V_d + V_i + V_h \\ V_2 = a^2 V_d + a V_i + V_h \\ V_3 = a V_d + a^2 V_i + V_h \end{cases}$$

Conocidos (V_d, V_i, V_h) quedan determinados (V_1, V_2, V_3) y, recíprocamente dados (V_1, V_2, V_3) existen y son únicos (V_d, V_i, V_h) ya que la matriz de paso es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ que es invertible por ser su determinante } 3(a - a^2) \neq 0$$

La inversión de esta matriz nos da:

$$\begin{aligned} V_d &= \frac{1}{3}(V_1 + aV_2 + a^2V_3) \\ V_i &= \frac{1}{3}(V_1 + a^2V_2 + aV_3) \\ V_h &= \frac{1}{3}(V_1 + V_2 + V_3) \end{aligned}$$

Lamando $\vec{V}_s = (V_d, V_i, V_h)$ “vector simétrico” asociado a $\vec{V}$ existe una correspondencia biunívoca entre el vector “fásico” y el vector simétrico:

$$\vec{V} = (V_1, V_2, V_3) \leftrightarrow \vec{V}_s = (V_d, V_i, V_h)$$

Los números complejos V_d , V_i , V_h se llaman, respectivamente, componente “directa”, “inversa” y “homopolar” del vector $\vec{V}$, distinguiéndolos así de sus componentes “fásicas”; también pueden notarse así:

$$\begin{cases} V_d = (\vec{V})_d \\ V_i = (\vec{V})_i \\ V_h = (\vec{V})_h \end{cases}$$

Propiedades aritméticas del operador “a”:

$$a = e^{j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = e^{j240^\circ} = \bar{a} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^3 = 1$$

$$1 + a + a^2 = 0$$

$$a - a^2 = j\sqrt{3}$$

Casos particulares:

$$1. \quad \vec{V} \text{ directo: } \underbrace{(V_1, a^2 V_1, a V_1)}_{\text{Fásicas}} \leftrightarrow \underbrace{(V_1, 0, 0)}_{\text{Simétricas}}$$

“Un vector directo sólo tiene componente directa”

$$2. \quad \vec{V} \text{ inverso: } \underbrace{(V_1, a V_1, a^2 V_1)}_{\text{Fásicas}} \leftrightarrow \underbrace{(0, V_1, 0)}_{\text{Simétricas}}$$

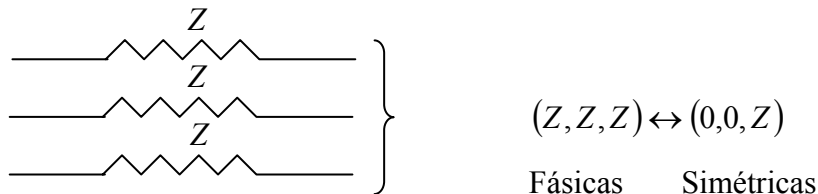
“Un vector inverso sólo tiene componente inversa”

$$3. \quad \vec{V} \text{ “homopolar”}: \underbrace{(V, V, V)}_{\text{Fásicas}} \leftrightarrow \underbrace{(0, 0, V)}_{\text{Simétricas}}$$

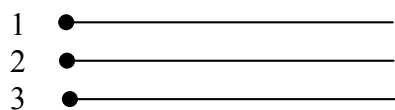
“Un vector homopolar sólo tiene componente homopolar”

Ejemplos:

1) Tramo de un circuito equilibrado o receptor formado por tres impedancias iguales:



2) Fuente equilibrada:



$$|V_1| = |V_2| = |V_3| = V$$

Con secuencia directa

Componentes simétricas: $(V, 0, 0)$

Operaciones:1) Suma:

Sean $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ y $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)$. La suma de esos dos vectores es:

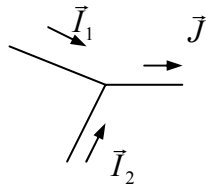
$$\vec{V} + \vec{U} = (V_1 + U_1, V_2 + U_2, V_3 + U_3)$$

Es consecuencia de la linealidad de la transformación a componentes simétricas:

$$\begin{cases} (\vec{V} + \vec{U})_d = V_d + U_d \\ (\vec{V} + \vec{U})_i = V_i + U_i \\ (\vec{V} + \vec{U})_h = V_h + U_h \end{cases}$$

Aplicación a circuitos trifásicos:

a) Corrientes en un nudo:

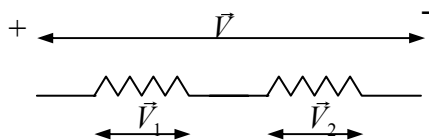


Representación
unifilar del nudo.

Las componentes simétricas de $\vec{J}$ son suma de las componentes simétricas correspondientes de $\vec{I}_1$ e $\vec{I}_2$.

$$\vec{J} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \quad (\text{ley de Kirchoff})$$

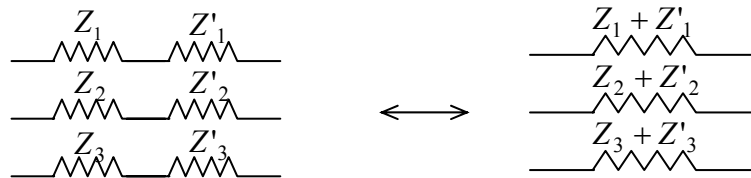
b) Tensiones en dos ramas en serie:



Representación
unifilar.

Las componentes simétricas de $\vec{V}$ son la suma de las componentes simétricas correspondientes de $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$.

c) Impedancias en serie:



Las componentes simétricas del vector fásico $(Z_1 + Z'_1, Z_2 + Z'_2, Z_3 + Z'_3)$ son la suma de las componentes simétricas correspondientes de los vectores fásicos (Z_1, Z_2, Z_3) y (Z'_1, Z'_2, Z'_3) .

2) Producto de un número por un vector:

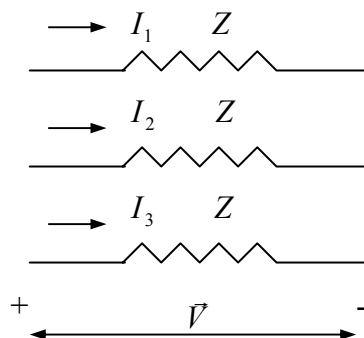
Sean el vector fásico $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ y el número complejo α . Es consecuencia de la linealidad que las componentes del vector fásico $\alpha\vec{V} = (\alpha V_1, \alpha V_2, \alpha V_3)$ son:

$$\begin{cases} (\alpha\vec{V})_d = \alpha V_d \\ (\alpha\vec{V})_i = \alpha V_i \\ (\alpha\vec{V})_h = \alpha V_h \end{cases}$$

En particular, para $\alpha = -1$:

$$\begin{cases} (-\vec{V})_d = -V_d \\ (-\vec{V})_i = -V_i \\ (-\vec{V})_h = -V_h \end{cases}$$

Aplicación a circuitos trifásicos:



Si las tres impedancias del ramal son iguales, el vector fásico de tensiones entre bornes es (ley de Ohm):

$$\vec{V} = (ZI_1, ZI_2, ZI_3) = Z(I_1, I_2, I_3)$$

y por lo tanto sus componentes simétricas son:

$$\begin{cases} V_d = ZI_d \\ V_i = ZI_i \\ V_h = ZI_h \end{cases}$$

En caso de una impedancia perfecta, la ley de Ohm puede aplicarse en las tres secuencias en forma desacoplada.

3) Producto fásico:

Dados los vectores fásicos $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ y $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)$, llamamos producto fásico de esos vectores al vector fásico:

$$\vec{P} = \vec{V} \otimes \vec{U} = (V_1U_1, V_2U_2, V_3U_3)$$

obviamente conmutativo.

Queremos hallar las componentes simétricas de $\vec{P}$ conocidas las componentes simétricas de $\vec{V}$ y $\vec{U}$.

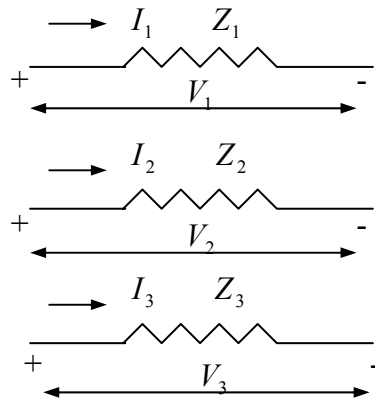
$$P_d = \frac{1}{3} (V_1U_1 + aV_2U_2 + a^2V_3U_3) = \frac{1}{3} [(V_d + V_i + V_h)(U_d + U_i + U_h) + a(a^2V_d + aV_i + V_h)(a^2U_d + aU_i + U_h) + a^2(aV_d + a^2V_i + V_h)(aU_d + a^2U_i + U_h)]$$

Realizando operaciones:

$$P_d = V_hU_d + V_iU_i + V_dU_h$$

Análogamente se procede para P_i y P_h , llegandose a la formula:

$$\begin{cases} (\vec{V} \otimes \vec{U})_d = V_hU_d + V_iU_i + V_dU_h \\ (\vec{V} \otimes \vec{U})_i = V_dU_d + V_hU_i + V_iU_h \\ (\vec{V} \otimes \vec{U})_h = V_iU_d + V_dU_i + V_hU_h \end{cases}$$

Aplicación a la ley de Ohm en componentes simétricas:

$$\begin{cases} V_1 = Z_1 I_1 \\ V_2 = Z_2 I_2 \\ V_3 = Z_3 I_3 \end{cases} \Rightarrow \vec{V} = \vec{Z} \otimes \vec{I}$$

Por las fórmulas anteriores:

$$\begin{cases} V_d = Z_h I_d + Z_i I_i + Z_d I_h \\ V_i = Z_d I_d + Z_h I_i + Z_i I_h \\ V_h = Z_i I_d + Z_d I_i + Z_h I_h \end{cases}$$

Vemos que en el caso de impedancias desequilibradas, la ley de Ohm ya no se aplica en forma desacoplada en las tres secuencias.

4) Conjugación

Dado el vector fásico $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$, llamamos “conjugado de $\vec{V}$ ” al vector fásico:

$$\hat{\vec{V}} = (\hat{V}_1, \hat{V}_2, \hat{V}_3)$$

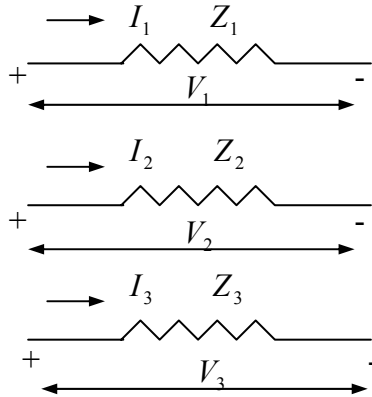
Vamos a hallar las componentes simétricas de $\hat{\vec{V}}$ conocidas las de $\vec{V}$.

$$\begin{aligned} \left(\hat{\vec{V}} \right)_d &= \frac{1}{3} (\hat{V}_1 + a \hat{V}_2 + a^2 \hat{V}_3) = \frac{1}{3} [conj(V_d + V_i + V_h) + a conj(a^2 V_d + a V_i + V_h) + a^2 conj(a V_d + a^2 V_i + V_h)] = \\ &= \frac{1}{3} [\hat{V}_d + \hat{V}_i + \hat{V}_h + a(a \hat{V}_d + a^2 \hat{V}_i + \hat{V}_h) + a^2(a^2 \hat{V}_d + a \hat{V}_i + \hat{V}_h)] = \hat{V}_i \end{aligned}$$

Análogamente se hallan las otras componentes, obteniéndose las fórmulas:

$$\begin{cases} (\hat{V})_d = \hat{V}_d \\ (\hat{V})_i = \hat{V}_i \\ (\hat{V})_h = \hat{V}_h \end{cases}$$

Aplicación: Potencia total consumida en un ramal desequilibrado.



La potencia eléctrica total consumida en este ramal es el escalar complejo:

$$\bar{S} = V_1 \hat{I}_1 + V_2 \hat{I}_2 + V_3 \hat{I}_3$$

Se trata de la suma de las componentes fásicas del vector:

$$\bar{S} = \vec{V} \otimes \hat{I} = (S_1, S_2, S_3)$$

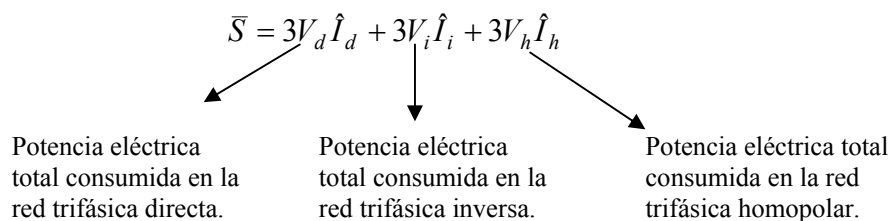
o sea que:

$$\bar{S} = S_1 + S_2 + S_3 = 3S_h$$

Usando la componente homopolar S_h del vector $\vec{V} \otimes \hat{I}$, obtenemos:

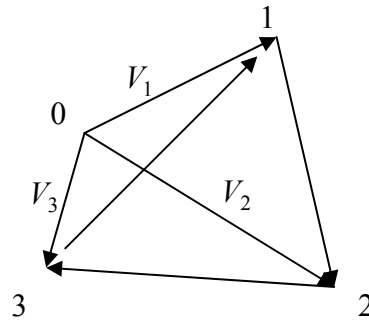
$$S = 3[V_i(\hat{I})_d + V_d(\hat{I})_i + V_h(\hat{I})_h]$$

De acuerdo al resultado anterior:



Del punto de vista de la potencia eléctrica total consumida en el ramal, se puede considerar las tres redes desacopladas, calcular la potencia eléctrica total consumida en cada red de secuencia y sumar los tres resultados. Esta conclusión es por otra parte intuitiva del punto de vista físico.

5) Pasaje de un sistema estrellado a un sistema compuesto:



$$\text{Sistema estrellado: } \vec{V}_e = (V_1, V_2, V_3) \leftrightarrow (V_{ed}, V_{ei}, V_{eh})$$

Componentes fásicas	Componentes simétricas
------------------------	---------------------------

Sistema compuesto:

$$\vec{V}_c = (V_3 - V_2, V_1 - V_3, V_2 - V_1) \leftrightarrow (V_{cd}, V_{ci}, V_{ch})$$

Componentes fásicas	Componentes simétricas
------------------------	---------------------------

Se trata de hallar las componentes simétricas de $\vec{V}_c$ conocidas las de $\vec{V}_e$.

Puede escribirse:

$$\vec{V}_c = (V_3, V_1, V_2) - (V_2, V_3, V_1)$$

$\downarrow$
 $\vec{V}$

$\downarrow$
 $\vec{U}$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 V_{cd} &= V_d - U_d = \\
 &= \frac{1}{3}(V_3 + aV_1 + a^2V_2) - \frac{1}{3}(V_2 + aV_3 + a^2V_1) = \\
 &= \frac{1}{3}[(a - a^2)V_1 + (a^2 - 1)V_2 + (1 - a)V_3] = \\
 &= \frac{1}{3}(j\sqrt{3}V_1 + j\sqrt{3}aV_2 + j\sqrt{3}a^2V_3) = \\
 &= \frac{1}{3}j\sqrt{3}(V_1 + aV_2 + a^2V_3)
 \end{aligned}$$

Nos queda:

$$V_{cd} = j\sqrt{3}V_{ed}$$

Procediendo análogamente para las otras componentes, se obtienen las fórmulas:

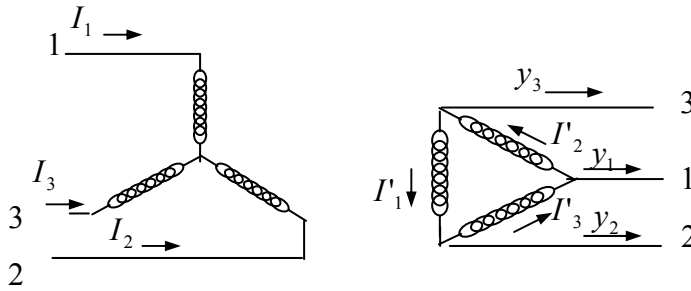
$$\begin{aligned}
 V_{cd} &= j\sqrt{3}V_{ed} \\
 V_{ci} &= -j\sqrt{3}V_{ei} \\
 V_{ch} &= 0
 \end{aligned}$$

El tercer resultado es previsible pues se trata de la componente homopolar de un vector cuya suma de componentes fásicas es nula.

Aplicación: Pasaje de componentes simétricas de corrientes a través de un transformador: $\triangleleft \triangle$

Sea un transformador de relación de transformación R (primario/secundario), con conexión $\triangleleft \triangle$ (el neutro de la estrella primaria puede estar eventualmente a tierra). Siendo K la relación de espiras, se tiene: $R = K\sqrt{3}$.

Cuando las corrientes que penetran al primario son equilibradas, las que salen del secundario se obtienen multiplicando éstas por R ; cuando son desequilibradas, o sea cuando tienen, además de la componente directa, una componente inversa (la homopolar es nula si el neutro está aislado o, si el neutro está a tierra, no sale del triángulo) se trata de ver cómo se transfieren las componentes simétricas de esas corrientes al secundario:



El vector de corrientes de líneas en el primario es:

$$\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$$

Mientras que el vector de corrientes de líneas que salen en el secundario es:

$$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

Pero:

$$\begin{aligned} y_1 &= I'_3 - I'_2 = KI_3 - KI_2 = K(I_3 - I_2) \\ y_2 &= I'_1 - I'_3 = KI_1 - KI_3 = K(I_1 - I_3) \\ y_3 &= I'_2 - I'_1 = KI_2 - KI_1 = K(I_2 - I_1) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\vec{y} = K(I_3 - I_2, I_1 - I_3, I_2 - I_1)$$

$$\downarrow$$

$$\vec{I}_c$$

Pero $\vec{I}_c$ es el vector “compuesto” correspondiente al “estrellado” $\vec{I}$ de modo que:

$$\begin{cases} I_{cd} = j\sqrt{3}I_d \\ I_{ci} = -j\sqrt{3}I_i \\ I_{ch} = 0 \end{cases}$$

Entonces, por una operación vista y recordando que $K\sqrt{3} = R$:

$$\begin{cases} y_d = jRI_d \\ y_i = -jRI_i \\ y_h = 0 \end{cases}$$

El resultado muestra que para obtener las componentes simétricas en el secundario a partir de las de las corrientes primarias, deben utilizarse, además de la relación de transformación R , los factores multiplicativos j , $-j$, 0 respectivamente para las tres secuencias. Podemos imprimir un giro simultáneo a las tres componentes (cambiando el origen de fases, pero no olvidar el giro adicional que crea el tipo de conexión del transformador), multiplicándolas por $-j$, resultando los factores $1, -1, 0$ que son de aplicación más práctica.